CAPÍTULO IV

LENTES

4-1. Lentes.—Una lente es un sistema óptico limitado por dos o más superficies refringentes que tienen un eje común. Si la lente sólo tiene dos superficies, se denomina lente *sencilla*; si tiene más de dos, se trata de una lente *compuesta*. Todas las lentes de alta calidad son lentes compuestas; es decir, están formadas por un cierto número de lentes sencillas que tienen un eje común. Las superficies de las lentes pueden estar en contacto o puede haber espacio de aire entre ellas.

Salvo en el caso de incidencia normal sobre una de las superficies, todo rayo que atraviesa una lente sencilla experimenta una desviación en ambas superficies. El espesor contado en la dirección del eje de muchas lentes sencillas es lo suficientemente pequeño para que pueda suponerse que toda la desviación de un rayo tiene lugar en un solo plano que pasa por el centro de la lente. Si puede hacerse esta aproximación, la lente se denomina *delgada*. Cualquier lente, simple o compuesta, que no pueda considerarse lente delgada se denomina, para abreviar, lente *gruesa*.

4-2. Lente sencilla en el aire.—El problema general de la refracción efectuada por una lente se resuelve aplicando sucesivamente a cada superficie los métodos de la sección 3-1, siendo el objeto para cada superficie, a partir de la primera, la imagen formada por la superficie anterior.

La figura 4-1 representa un pincel de rayos [1] que diverge desde el punto Q de un objeto PQ e incide sobre una lente sencilla L. Representemos por n el índice de refracción de la sustancia de que está construída la lente y por R_1 y R_2 los respectivos radios de curvatura de las superficies primera y segunda. La lente se encuentra en el aire. La primera superficie de la lente forma una imagen virtual de Q en Q'. Esta imagen virtual sirve de objeto real para la segunda superficie, que forma una imagen real de Q' en Q''. La distancia al objeto desde el primer vértice es s_1. La distancia imagen correspondiente, s'_1, se encuentra mediante la ecuación [3-5].

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{R_1} \qquad [4\text{-}1]$$

La distancia desde el segundo vértice al objeto $P'Q'$ es:

$$s_2 = t - s'_1, \qquad [4\text{-}2]$$

[1] Las fórmulas utilizadas en este capítulo están basadas en la teoría de primer orden y se aplican a rayos paraxiales. Para una mayor claridad se han exagerado todas las figuras lateralmente y no se han tenido en cuenta las aberraciones.

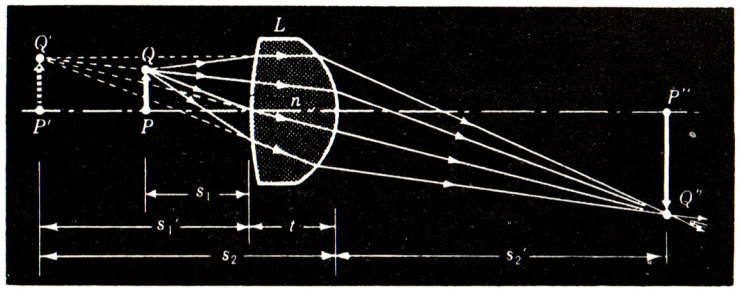


FIG. 4-1.—Formación de una imagen por una lente sencilla. La imagen formada por la primera superficie sirve de objeto para la segunda.

donde t es el espesor axial de la lente. (Tenemos que escribir $t - s'_1$ y no $t + s'_1$, porque la distancia imagen s'_1 es negativa.)

Cuando se aplica la ecuación [3-5] a la segunda superficie, se obtiene:

$$\frac{n}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1-n}{R_2} \qquad [4\text{-}3]$$

De las ecuaciones [4-1], [4-2] y [4-3] puede deducirse s'_2, lo que da la distancia de la imagen final $P''Q''$ al segundo vértice. Se obtiene la altura de la imagen final multiplicando la altura del objeto PQ por el producto de los aumentos laterales debidos a cada superficie.

Evidentemente, este método de determinar la posición y tamaño de una imagen se extiende a cualquier número de superficies, como en el ejemplo de la sección 3-6.

4-3. Focos y planos focales.—Puede definirse el *foco objeto* de una lente como el punto objeto situado sobre el eje cuya imagen se forma en el infinito. De otro modo: los rayos que divergen desde el foco objeto son paralelos, después de la refracción, al eje de la lente, como indica la figura 4-2 (*a*). El foco objeto se designará por F.

Un plano que pasa por el foco objeto y es perpendicular al eje se denomina *plano focal objeto*. La figura 4-2 (*b*) representa un pincel de rayos que divergen desde un punto P situado en el plano focal objeto. Después de la refracción estos rayos son *paralelos entre sí*, pero no al eje de la lente. Esto es, convergen a una distancia imagen infinitamente alejada del punto P.

Se define el *foco imagen* de una lente como la imagen de un punto infinitamente alejado sobre el eje de la lente. Es decir, los rayos que inciden sobre la lente, paralelos al eje de la misma, pasan después de la refracción por el foco imagen, según se ve en la figura 4-2 (*c*). El foco imagen se designa por la letra F'.

Se denomina *plano focal imagen* a un plano que pasa por el foco imagen y es perpendicular al eje. En la figura 4-2 (*d*), un haz de rayos paralelos procedentes de un punto objeto infinitamente alejado, y no situado

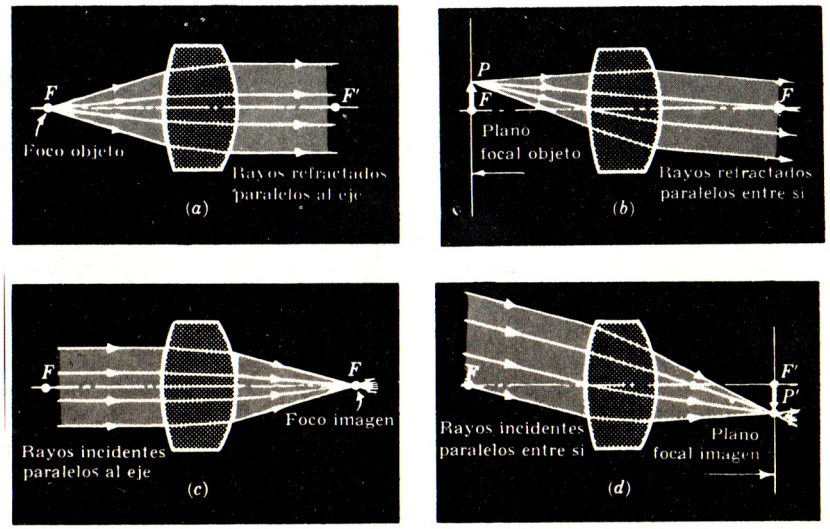


FIG. 4-2.—(*a*) Los rayos que divergen desde el foco objeto son paralelos al eje después de la refracción. (*b*) Los rayos que divergen desde un punto situado en el plano focal objeto son paralelos entre sí después de la refracción. (*c*) Los rayos que inciden paralelos al eje pasan después de la refracción por el foco imagen. (*d*) Los rayos que inciden paralelos entre sí convergen formando una imagen en el plano focal imagen.

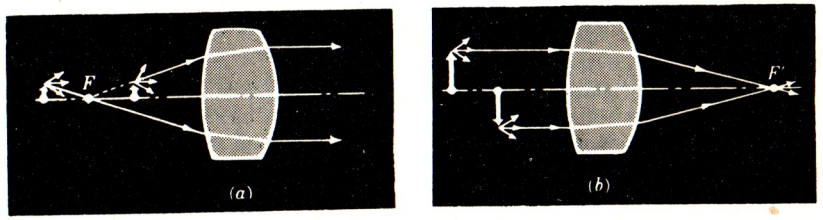


FIG. 4-3.

sobre el eje de la lente, converge para formar una imagen en P', situada en el plano focal imagen de la lente.

No es necesario que un rayo *se origine* realmente en el foco objeto de una lente para que su dirección, después de refractado, sea paralela al eje de la lente. La desviación de un rayo que incide en cualquier punto de una lente sólo depende de su *dirección* en el punto de incidencia. Esto queda aclarado en la figura 4-3 (*a*), que representa la desviación de dos rayos, uno de los cuales se origina a la izquierda del foco objeto y el otro a la derecha de dicho punto. Análogamente, cualquier rayo que incide sobre una lente paralelamente al eje de la misma, pasa después de la refracción por el foco imagen, como se indica en la figura 4-3 (*b*).

Para determinar la posición del foco objeto de una lente sencilla, hagamos s'_2 igual a infinito en [4-3] y resolvamos esta ecuación respecto a s_2. A continuación hallamos s'_1 mediante [4-2] e introducimos este valor en la ecuación [4-1], con lo cual determinamos s_1. Esto da la distancia desde el foco objeto al primer vértice. De forma análoga se determina el foco imagen, haciendo s_1 igual a infinito y calculando s'_2, lo que da la distancia desde el segundo vértice al foco imagen.

Si la lente tiene más de dos superficies, los focos se determinan generalizando el proceso anterior; es decir: se hace la distancia imagen final igual a infinito y se calcula la correspondiente distancia objeto; después se hace la distancia objeto igual a infinito y se calcula la distancia imagen.

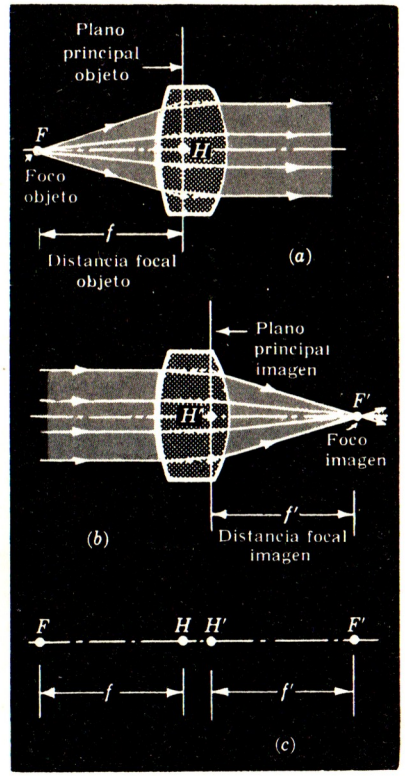


FIG. 4-4.—(*a*) Puede suponerse que toda la desviación de los rayos que proceden del foco objeto se produce en el plano principal objeto. (*b*) Cabe suponer que toda la desviación de los rayos que inciden paralelos al eje se produce en el plano principal imagen. (*c*) La distancia entre cada foco y el correspondiente punto principal es la distancia focal.

4-4. Puntos principales y distancias focales.—El cálculo de la posición y tamaño de la imagen de un objeto dado a una distancia determinada de una lente se facilita fijando las posiciones de dos puntos situados sobre el eje de la lente y que se denominan *puntos principales*. Estos puntos se definen del modo siguiente.

La figura 4-4 (*a*) representa un cono de rayos que divergen desde el foco objeto de una lente sencilla y son desviados en ambas superficies de la lente. Cuando los rayos incidentes y emergentes se prolongan hacia adelante y hacia atrás, como indican las líneas de trazos, los puntos de intersección se encuentran en un mismo plano denominado *plano principal objeto* de la lente. Esto es, las dos desviaciones en ambas superficies de la lente equivalen a una sola desviación en el plano principal objeto. El punto de intersección del plano principal objeto con el eje de la lente es el *punto principal objeto* y se designa por H.

La figura 4-4 (*b*) representa un haz de rayos que incide sobre una lente sencilla paralelamente a su eje. Cuando se prolongan los rayos incidentes

y emergentes hacia adelante y hacia atrás, los puntos de intersección se encuentran en un plano llamado *plano principal imagen*. El punto de intersección de este plano con el eje es el *punto principal imagen* y se designa por la letra H'. Excepto en lentes corregidas, solamente para rayos paraxiales se cumple que los *planos* focales y principales sean realmente planos perpendiculares al eje. En general, se trata de superficies curvas y deberían llamarse propiamente *superficies focales* y *superficies principales*.

La distancia del foco objeto F al punto principal objeto H se denomina *distancia focal objeto* de la lente y se designa por f. La distancia desde el punto principal imagen H' al foco imagen F' se llama *distancia focal imagen* y se representa por f'. Si el medio a ambos lados de la lente tiene el mismo índice, como sucede cuando la lente se encuentra en el aire, ambas distancias focales son iguales. Éste es el único caso que consideraremos (excepto en algunos problemas), y representaremos por f el valor común de la distancia focal.

En la sección próxima explicaremos cómo se calcula la distancia focal de una lente delgada, y cómo se determinan sus focos y puntos principales. En la sección 4-9 se estudiará el problema, más general, de una lente gruesa.

En la sección 2-6 se describió un tipo de reflector de retroceso utilizado en las señales de carreteras. Otro tipo corriente es el llamado *botón*

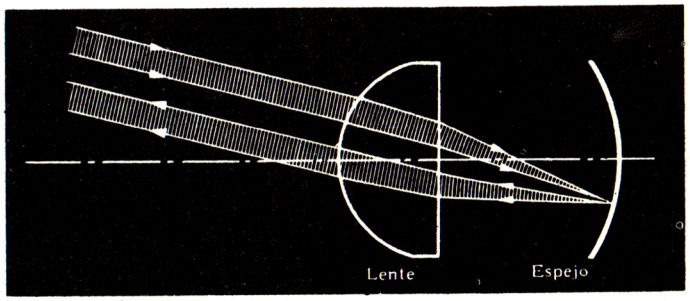


FIG. 4-5.—Principio del botón retrovisor.

retrovisor, que se representa en la figura 4-5. Se compone de una gruesa lente convergente, de pequeña distancia focal, combinada con un espejo cóncavo coincidente con la superficie focal imagen de la lente. (Como se ha dicho anteriormente, los *planos* focales de una lente no corregida son en realidad superficies curvas.) Un haz paralelo incidente, sea o no paralelo al eje de la lente, converge en un punto del espejo y vuelve después a la lente como un haz que diverge desde el punto en el cual ha tenido lugar la reflexión. Puesto que este punto se encuentra en la superficie focal imagen, la lente produce un haz emergente paralelo, cuyo sentido de propagación es justamente el inverso del incidente.

Las aberraciones de una lente esférica sencilla introducen en el haz reflejado la necesaria dispersión.

4-5. Lente delgada.—Puede considerarse que toda la desviación producida en un rayo cualquiera al atravesar una lente *delgada* se verifica en un plano que pasa por el centro de la lente. Esto es, los planos principales objeto e imagen de una lente delgada coinciden; por tanto, coinciden también los puntos principales objeto e imagen, que a su vez lo hacen con el centro de la lente. Según esto la distancia focal de una lente delgada es simplemente la distancia desde el centro de la lente a cada foco. (Véase Fig. 4-6.)

El foco objeto de una lente cualquiera es, por definición, el punto objeto del eje cuya imagen se forma en el infinito. Para encontrar la posición del foco objeto de una lente delgada, hagamos s'_2 igual a infinito en la ecuación [4-3]; se obtiene:

$$\frac{n}{s_2} = \frac{1 - n}{R_2} \qquad [4\text{-}4]$$

Como el espesor axial t de una lente delgada es despreciable, se tiene en virtud de [4-2],

$$s'_1 = -s_2,$$

y, por tanto,

$$\frac{n}{s_2} = -\frac{n}{s'_1} \qquad [4\text{-}5]$$

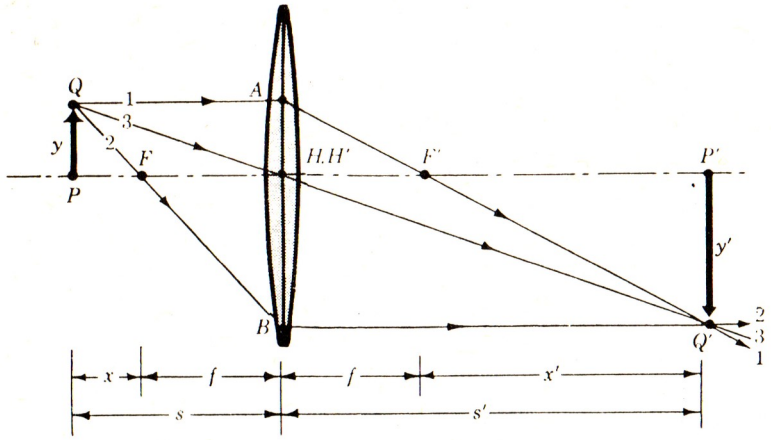


FIG. 4-6.—Los puntos principales de una lente delgada coinciden.

Combinando las ecuaciones [4-4] y [4-5] con la [4-1] obtenemos:

$$\frac{1}{s_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad [4\text{-}6]$$

En rigor, s_1 es la distancia desde el foco objeto al primer vértice, aunque si la lente es delgada, puede suponerse que los puntos principales y los vértices de la lente coinciden. Por tanto, s_1 es también la distancia desde el foco objeto F al punto principal objeto H, y por tanto, es igual, por definición, a la distancia focal f. Entonces, según la ecuación anterior,

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \qquad [4\text{-}7]$$

Por consiguiente, la distancia focal de una lente delgada situada en el aire, sólo depende del índice de la lente y de los radios de curvatura de sus superficies. La ecuación [4-7] se denomina *ecuación del constructor*. Se propone como ejercicio al lector la demostración de que se obtiene la misma ecuación cuando se calcula la distancia desde el punto principal imagen al foco imagen.

EJEMPLO.— Calcúlese la distancia focal de la lente delgada planoconvexa de la figura 4-7. El índice de la lente es 1,50.

Si la luz incide por la cara convexa,

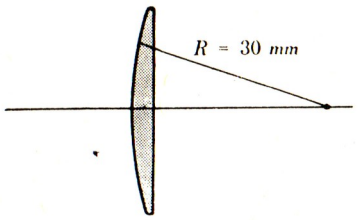


FIG. 4-7.

$$R_1 = +30 \text{ mm}, \quad R_2 = \infty.$$

$$\frac{1}{f} = (1{,}50 - 1)\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{\infty}\right),$$

$$f = +60 \text{ mm}.$$

Si la luz incide por la cara plana,

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = -30 \text{ mm}.$$

$$\frac{1}{f} = (1{,}50 - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-30}\right),$$

$$f = +60 \text{ mm}.$$

Es indiferente, por tanto, considerar como primera una u otra de las superficies; o, de otro modo, las distancias focales objeto e imagen son iguales.

Vamos a deducir ahora cuatro ecuaciones importantes a partir de las cuales pueden calcularse la distancia imagen y el aumento lateral para un objeto situado a una distancia cualquiera de una lente delgada. En la figura 4-6 se han representado un objeto PQ de altura y y su imagen $P'Q'$ de altura y', formada por una lente delgada. En ausencia de aberraciones, *todos* los rayos procedentes del punto Q forman la imagen en Q'. (Se supone que la desviación total de todos los rayos procedentes de Q tiene lugar en un plano que pasa por el centro de la lente.) Por consiguiente, el punto de intersección de *dos rayos cualesquiera* procedentes de Q basta para determinar la posición de la imagen Q'. Una vez determinada de este modo la posición de Q', se conocen las trayectorias de todos los demás rayos.

Según las definiciones de plano principal imagen y foco imagen, el rayo 1 de la figura 4-6, inicialmente paralelo al eje, pasa una vez refractado por el foco imagen F'. Por las definiciones de foco objeto y plano principal objeto, el rayo 2, que incide en la lente después de pasar por el foco objeto F, resulta paralelo al eje después de la refracción. Un tercer rayo cuya trayectoria puede trazarse fácilmente en una lente delgada es el 3 de la figura 4-6. Este rayo, dirigido hacia el centro de la lente, no es desviado, porque las superficies de ambas lentes son paralelas entre sí en el eje de la lente y, según hemos demostrado, un rayo que pasa por una lámina cuyas superficies son paralelas no sufre desviación. Hay, naturalmente, un desplazamiento transversal, que si la lente es delgada resulta despreciable.

Utilicemos la letra s, sin subíndice, para representar la distancia objeto *medida desde el punto principal objeto* H, y la letra s' para designar la distancia imagen *medida desde el punto principal imagen* H'. Dado que H y H' coinciden en el centro de una lente delgada, ambas distancias, objeto e imagen, pueden medirse desde el centro de una lente de esta clase. En una lente gruesa, H y H' no coinciden; este caso más general se estudiará en la sección 4-9. Representemos por x y x' las distancias objeto e imagen *medidas a partir de los respectivos focos* F y F'. Las distancias objeto s y x se suponen positivas cuando el objeto se encuentra a la izquierda de su punto de referencia, como en la figura 4-6, y las distancias imagen s' y x' se consideran positivas si la imagen se encuentra a la derecha de su punto de referencia.

De los triángulos semejantes PQF y FHB de la figura 4-6, se deduce:

$$\frac{PQ}{PF} = \frac{HB}{FH}$$

Pero $PQ = y$, $PF = x$, $HB = -y'$, $FH = f$. (Ponemos $HB = -y'$ porque, por el convenio 6.º (pág. 63), la altura y' de la imagen invertida $P'Q'$ es negativa.) Por consiguiente,

$$\frac{y}{x} = \frac{-y'}{f} \qquad [4\text{-}8]$$

Del mismo modo, de los triángulos semejantes $AH'F'$ y $F'P'Q'$ se deduce:

$$\frac{y}{f} = \frac{-y'}{x'} \qquad [4\text{-}9]$$

También, de los triángulos semejantes QAB y FHB, resulta:

$$\frac{y - y'}{s} = \frac{-y'}{f}, \qquad [4\text{-}10]$$

y de los triángulos ABQ' y $AH'F'$,

$$\frac{y - y'}{s'} = \frac{y}{f} \qquad [4\text{-}11]$$

Si se suman [4-10] y [4-11], se obtiene:

$$\frac{y - y'}{s} + \frac{y - y'}{s'} = \frac{y}{f} - \frac{y'}{f} = \frac{y - y'}{f},$$

o sea

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}} \qquad [4\text{-}12]$$

Al dividir [4-8] por [4-9], resulta:

$$\frac{f}{x} = \frac{x'}{f},$$

o bien

$$\boxed{xx' = f^2} \qquad [4\text{-}13]$$

El aumento lateral m es la razón de y' a y. Dividiendo [4-10] por [4-11] se obtiene:

$$\boxed{m = -\frac{s'}{s}} \qquad [4\text{-}14]$$

También, de [4-8] y [4-9] resulta:

$$\boxed{m = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}} \qquad [4\text{-}15]$$

La ecuación [4-12] se conoce como forma *gaussiana* de la ecuación de las lentes, en honor del matemático Karl F. Gauss. (Asimismo reciben su nombre el teorema de Gauss de electrostática y la unidad de densidad de flujo en el sistema electromagnético de unidades, el gauss.) La ecuación [4-13], deducida por vez primera por sir Isaac Newton, es la forma *newtoniana* de la ecuación de las lentes. La forma gaussiana es probablemente más conocida, pero la newtoniana es más sencilla. Obsérvese atentamente que en la primera ecuación, las distancias objeto e imagen s y s' se miden desde los *puntos principales* H y H', respectivamente (o sea, desde el centro de una lente delgada), mientras que en la última, las distancias objeto e imagen x y x' se miden desde los *focos* F y F'.

El aumento lateral m puede expresarse, bien en función de s y s', mediante la ecuación [4-14], o en función de x, x' y f, por la ecuación [4-15].

EJEMPLO.—Un objeto se encuentra 30 cm a la izquierda de una lente delgada de distancia focal 20 cm, como en la figura 4-6. Determínense la posición y el aumento lateral de su imagen utilizando ambas formas, gaussiana y newtoniana, de la ecuación de las lentes.

La distancia objeto s, medida desde el centro de la lente, es $+30$ cm. Según la ecuación de Gauss,

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20},$$

$$s' = +60 \text{ cm}.$$

La imagen es real (s' es positiva) y se encuentra 60 cm a la derecha del centro de la lente.

La distancia objeto x, medida desde el foco objeto, es $+10$ cm. En virtud de la ecuación de Newton,

$$10x' = (20)^2,$$

$$x' = +40 \text{ cm},$$

que coincide evidentemente con la solución anterior. El aumento lateral, dado por [4-14], es

$$m = -\frac{60}{30} = -2.$$

La imagen es invertida (m es negativo) y dos veces mayor que el objeto. Según la ecuación [4-15],

$$m = -\frac{20}{10} = -\frac{40}{20} = -2.$$

En los siete casos de la figura 4-8, se ha dibujado un cierto número de rayos procedentes de la punta de la flecha que representa un objeto O, los cuales atraviesan una lente delgada de distancia focal f. Se han despreciado las aberraciones de la lente. La imagen de la punta de la flecha se ha determinado utilizando dos (y en algunos casos, los tres) de los rayos considerados en la figura 4-6. Se han dibujado, además, los rayos más exteriores que inciden sobre la lente. Las distancias objeto son, respectivamente, $+3f$, $+2f$, $+\frac{3}{2}f$, $+f$, $+\frac{3}{4}f$, 0 y $-2f$. En los casos (1) a (5) inclusive, el objeto es real. Puede tratarse de un objeto material o bien de la imagen formada por un sistema anterior de lentes. En el caso (7), el objeto es virtual (incide sobre la lente un cono de rayos convergente) y tendrá que haber, necesariamente, una lente en un cierto lugar a la izquierda de la representada. En el caso (6), el objeto coincide con la lente; aquí desaparece la diferencia entre objetos reales y virtuales, y cabe imaginar que O es un objeto real situado inmediatamente a la izquierda de la lente, o un objeto virtual inmediatamente a la derecha

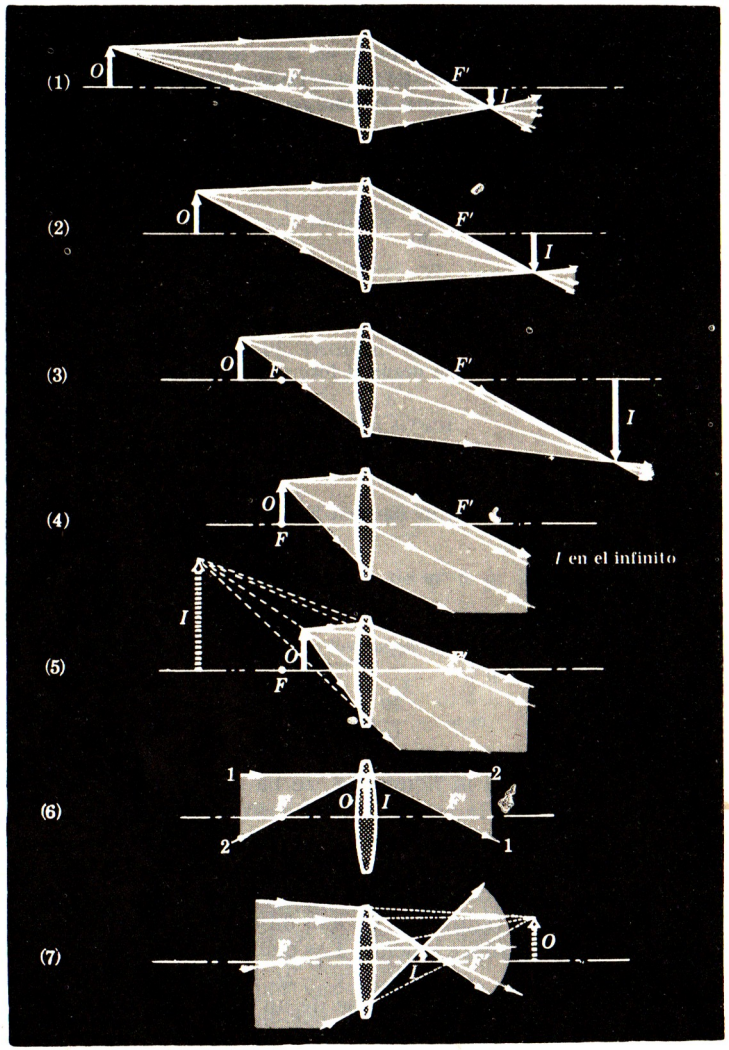


FIG. 4-8.—Formación de una imagen por una lente delgada.

de ella. El esquema está dibujado como si O fuera una imagen real formada por una lente anterior, pero podría ser también un objeto material en contacto con la lente. En este último caso, no habría, naturalmente, rayos a la izquierda de la lente. Obsérvese que entonces, objeto e imagen coinciden.

Caso	s	s'	x	x'	m	Objeto	Imagen	Derecha o Invertida
1	$+3f$	$+\frac{3}{2}f$	$+2f$	$+\frac{1}{2}f$	$-\frac{1}{2}$	Real	Real	Invertida
2	$+2f$	$+2f$	$+f$	$+f$	-1	Real	Real	Invertida
3	$+\frac{3}{2}f$	$+3f$	$+\frac{1}{2}f$	$+2f$	-2	Real	Real	Invertida
4	$+f$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$	Real	Real o Virtual	Derecha o Invertida
5	$+\frac{2}{3}f$	$-2f$	$-\frac{1}{3}f$	$-3f$	$+3$	Real	Virtual	Derecha
6	0	0	$-f$	$-f$	$+1$	Real o Virtual	Real o Virtual	Derecha
7	$-2f$	$+\frac{2}{3}f$	$-3f$	$-\frac{1}{3}f$	$+\frac{1}{3}$	Virtual	Real	Derecha

FIG. 4-9.

La figura 4-9 relaciona los valores de s, s', x, x' y m para cada caso de la figura 4-8, y establece también si el objeto y la imagen son reales o virtuales, y si la imagen es derecha o invertida.

La figura 4-10 es la representación gráfica de la ecuación de las lentes de Gauss,

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f},$$

en la cual las distancias objeto s se han representado sobre el eje horizontal y las distancias imagen s', sobre el vertical. Para poner de acuerdo nuestro convenio de que las distancias objeto son positivas cuando el objeto se encuentra a la izquierda de la lente, los valores positivos de s están representados hacia la izquierda. Los puntos (1), (2), (3), etc., a lo largo de la gráfica se corresponden con los casos igualmente numerados de la figura 4-8.

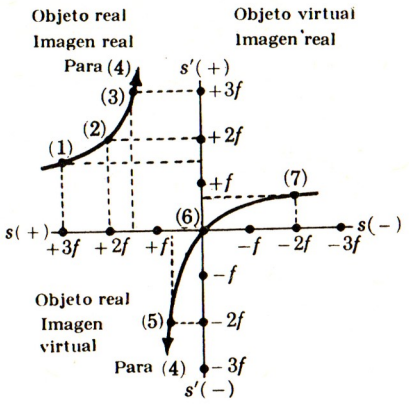


FIG. 4-10.—Gráfica de la ecuación de Gauss de las lentes.

La figura 4-11 es una representación análoga de la ecuación de Newton,

$$xx' = f^2.$$

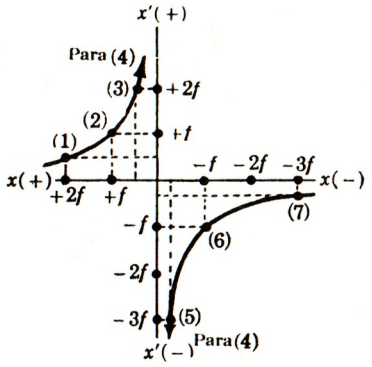


FIG. 4-11.—Gráfica de la ecuación de Newton de las lentes.

Los puntos numerados corresponden a los casos correspondientes de la figura 4-8.

Es aconsejable estudiar cuidadosamente las cuatro figuras precedentes.

4-6. Imágenes que actúan como objetos.—Se hizo ver en la sección 3-6 (Fig. 3-16) que la imagen formada por cualquier *superficie* de un sistema óptico sirve de objeto para la superficie siguiente. En la mayoría de los sistemas ópticos que emplean lentes se utiliza más de una, y la imagen formada por una cualquiera de ellas sirve de objeto para la siguiente. La figura 4-12 aclara las distintas posibilidades. La lente 1 de dicha figura forma una imagen real en P de un objeto real situado en O. Esta imagen real sirve de objeto real para la lente 2; la imagen virtual Q formada por la lente 2 es un objeto real para la lente 3. Si no existiese la lente 4, la lente 3 formaría una imagen real en R. Aunque esta imagen no llega a formarse, sirve de objeto virtual para la lente 4, que forma una imagen real final en I.

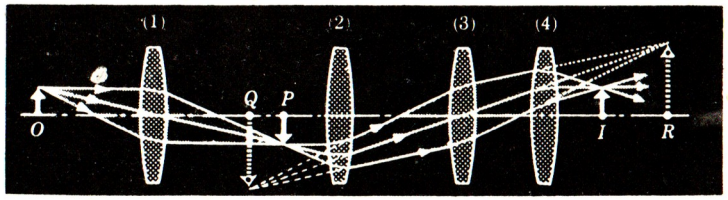


FIG. 4-12.—El objeto para cada lente, a partir de la primera, es la imagen formada por la lente anterior.

4-7. Imágenes tridimensionales.—Se indicó en la sección 2-6 que en la mayor parte de los casos el objeto y la imagen son tridimensionales, y que no siempre basta representar un objeto por una sola flecha. Consideraremos a continuación algunos de los aspectos de la formación de imágenes tridimensionales por una lente.

El aumento lateral o transversal m, definido en la sección 3-3, proporciona la razón según la cual aumentan o disminuyen las dimensiones

transversales de una imagen respecto al objeto. Calculemos ahora la razón correspondiente de las dimensiones longitudinales o axiales de una imagen a las del objeto.

La figura 4-13 representa una corta flecha PQ, que se encuentra sobre el eje de una lente. La imagen de P se halla en P', y la de Q, en Q'.

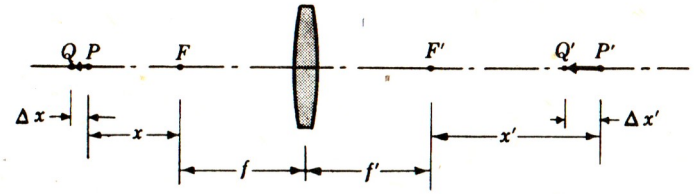


FIG. 4-13.—La razón $\Delta x'/\Delta x$ es el aumento longitudinal.

Sean x y x' las distancias objeto e imagen de P y P', medidas desde los focos F y F', respectivamente. Designemos por Δx la longitud de la flecha PQ, y por $\Delta x'$ la de su imagen $P'Q'$. En virtud de [4-13],

$$x' = \frac{f^2}{x}$$

Diferenciando ambos miembros, se obtiene:

$$dx' = -\frac{f^2}{x^2}\,dx,$$

o, aproximadamente,

$$\Delta x' = -\frac{f^2}{x^2}\,\Delta x.$$

Como el aumento transversal, m, es igual a $-f/x$, resulta:

$$\Delta x' = -m^2 \Delta x.$$

El *aumento longitudinal* se define como la razón de la longitud de la imagen, $\Delta x'$, a la del objeto, Δx; por tanto,

$$\text{Aumento longitudinal} = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -m^2. \qquad [4\text{-}16]$$

El aumento longitudinal es igual, por consiguiente, al cuadrado del aumento lateral (con signo cambiado). Se deduce que, excepto en el caso especial en que $m = \pm 1$, los aumentos longitudinal y transversal son distintos; p. ej., si el aumento transversal es igual a $-2\times$, el longitudinal será $4\times$. Si el objeto fuera un cubo muy pequeño, situado sobre el eje de la lente, su imagen no sería un cubo, sino un paralelepípedo recto rectangular, de longitud doble que su anchura. En general (excepto

para $m = \pm 1$), un objeto y su imagen no son geométricamente semejantes.

De la ecuación [4-16] se deduce también, por ser m^2 necesariamente positivo, que Δx y $\Delta x'$ tienen siempre signos opuestos. Esto es, si un objeto en forma de flecha, situado sobre el eje, apunta en el sentido de las x crecientes, como en la figura 4-13, su imagen señala en el sentido de las x' decrecientes. El lector puede comprobar que, a consecuencia de lo anterior, un objeto axial en forma de flecha y su imagen formada por una lente, apuntan siempre en el mismo sentido.

En la figura 4-14 se ha representado la imagen tridimensional, formada por una lente, de un objeto tridimensional. Hemos de destacar de nuevo que la imagen existe en el espacio y no es simplemente algo *proyectado sobre una pantalla*. Las flechas *o'b'* y *o'c'* están invertidas en el espacio, respecto a *ob* y *oc*, mientras que *o'a'* apunta en el mismo sentido que *oa*. Aunque hablamos de una imagen *invertida* sólo están invertidas sus dimensiones transversales.

La figura 4-14 debe compararse con la 2-15, que representa la imagen formada por un espejo plano. Obsérvese que en el caso de la lente, la imagen, aunque invertida, no es simétrica. Es decir, si el objeto es la mano izquierda su imagen es también la mano izquierda. Esto puede comprobarse apuntando con el dedo pulgar izquierdo a lo largo de *oa*, con el dedo índice de la misma mano a lo largo de *oc*, y con el dedo medio a lo largo de *ob*. Una rotación de 180° de la misma mano alrededor del dedo pulgar como eje hace que los dedos coincidan con *o'c'* y *o'b'*. En otras palabras, la inversión de una imagen es equivalente a una rotación de 180° alrededor del eje de la lente.

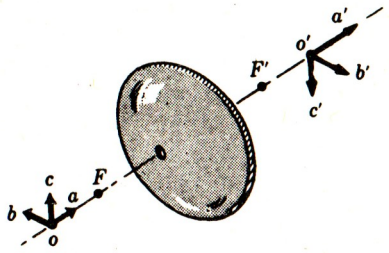


Fig. 4-14.—Imagen tridimensional invertida.

Debemos hacer aún otra comparación con la imagen formada por un espejo. Como los rayos que inciden sobre una lente no cambian de sentido, como sucede en el espejo, un observador colocado en la lente de la figura 4-14, mirando hacia el objeto, no puede ver la imagen sin más que dar la vuelta. En vez de esto, para ver la imagen ha de pasar al otro lado de la lente y colocarse a una distancia de al menos 25 cm más allá de ella, mirando en el sentido inicial. Entonces, la flecha *o'a'* apunta hacia él como lo hacía la flecha *oa*, mientras que *o'b'* y *o'c'* están ambas invertidas. El caso difiere del de la figura 2-15 en dos aspectos: primero, las imágenes tienen distinta posición en el espacio, y segundo, han de ser vistas desde lados opuestos.

4-8. Lentes divergentes.—Un haz de rayos paralelos que incide sobre la lente representada en la figura 4-2 converge para formar una imagen real después de atravesar la lente. Esta lente se denomina *convergente*. Su distancia focal, calculada mediante la ecuación [4-7], es una magnitud positiva, y por ello se denomina también *lente positiva*.

Un haz de rayos paralelos que incide sobre la lente de la figura 4-15 diverge después de la refracción, y la lente se denomina *divergente*. Su distancia focal, calculada mediante [4-7], es negativa, y por ello se denomina también *lente negativa*.

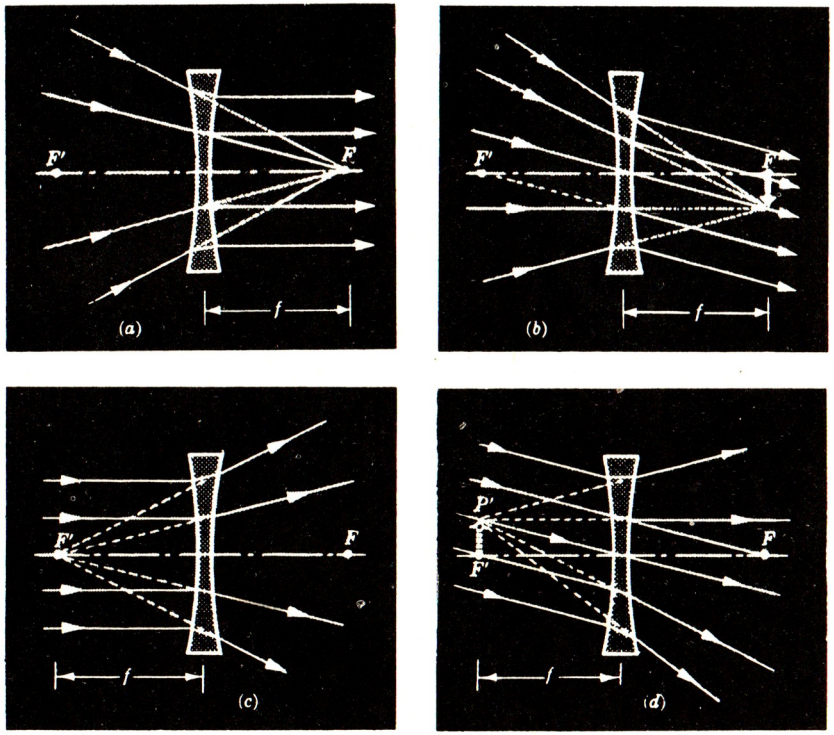


FIG. 4-15.—Focos y planos focales de una lente delgada divergente.

El foco objeto de una lente cualquiera, sea positiva o negativa, puede definirse como el punto objeto del eje cuya imagen dada por la lente se encuentra en el infinito. Como la distancia focal de una lente divergente es negativa, la distancia objeto de este punto del eje es también negativa, o sea, el objeto es *virtual*. Así los rayos que inciden sobre la lente y *convergen hacia* el foco objeto son paralelos a la lente después de la refracción, como indica la figura 4-15 (*a*).

El foco imagen de cualquier lente se define como el punto imagen

de un punto objeto sobre el eje, infinitamente alejado. Los rayos paralelos que inciden sobre una lente negativa parecen *divergir* después de la refracción *desde* una imagen virtual situada en el foco imagen [Fig. 4-15 (*c*)]. Así, los focos de una lente divergente están invertidos respecto a los de una lente convergente.

Los planos focales de una lente divergente tienen la misma significación que los de una lente convergente, y están representados en la figura 4-15 (*b*) y (*d*). Los rayos que convergen hacia un punto objeto virtual del plano focal objeto son paralelos entre sí después de la refracción; un haz de rayos paralelos (no paralelos al eje de la lente) parecen divergir después de la refracción desde un punto situado en el plano focal imagen.

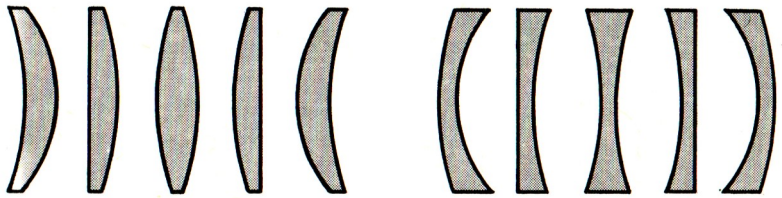


FIG. 4-16.—(*a*) Lentes convergentes: menisco convergente, plano-convexa y biconvexa. (*b*) Lentes divergentes: menisco divergente, plano-cóncava y bicóncava.

Cualquier lente delgada, más gruesa en el centro que en el borde, y cuyo índice sea mayor que el medio que la rodea, es convergente o positiva. Si la lente es más gruesa en el borde que en el centro, resulta divergente. En la figura 4-16 se representan las secciones de varias lentes convergentes y divergentes.

Además de las lentes de superficies esféricas, se utilizan con frecuencia lentes *cilíndricas*, particularmente en las gafas, para corregir un defecto de la visión denominado *astigmatismo*. Una o ambas caras de una lente cilíndrica son porciones de superficies cilíndricas (Fig. 4-17). Puesto que a menudo el astigmatismo va acompañado de otros defectos de la visión, una lente de gafas puede ser cilíndrica por una cara y esférica por la otra, o bien una de sus superficies es una combinación de cilindro y esfera.

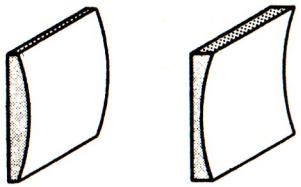


FIG. 4-17.—Lentes cilíndricas.

El uso de gafas para corregir los defectos de la visión será estudiado en la sección 6-3.

En el sistema de iluminación de un microscopio compuesto se utilizan lentes formadas por superficies de *paraboloides* (véase Sec. 6-6.)

4-9. Lentes gruesas.—La posición y aumento de la imagen de un objeto dado, formada por una lente gruesa, se determina por aplicaciones sucesivas, a cada superficie de la lente, de los métodos expuestos en la sección 3-1. Este procedimiento es tan adecuado como cualquier otro, pero resulta engorroso cuando ha de calcularse un gran número de distancias objeto e imagen. Vamos a demostrar en esta sección que las ecuaciones de Gauss y de Newton, deducidas únicamente para lentes delgadas, pueden aplicarse también a las lentes gruesas.

Para empezar, consideremos la lente gruesa *sencilla* representada en la figura 4-18. El foco imagen F' de esta lente se localiza determinando la posición de la imagen de un punto objeto del eje, infinitamente alejado, según se explicó en la sección 4-3. Esto es, hacemos en la figura 4-18 s_1 igual infinito y calculamos sucesivamente s'_1, s_2 y, finalmente, s'_2. Obtenemos así la distancia del foco imagen, medida a partir del segundo vértice.

El paso siguiente consiste en calcular la distancia focal de la lente. La figura 4-18 representa un solo rayo que procede de un punto objeto del eje infinitamente alejado. Este rayo incide en la primera superficie

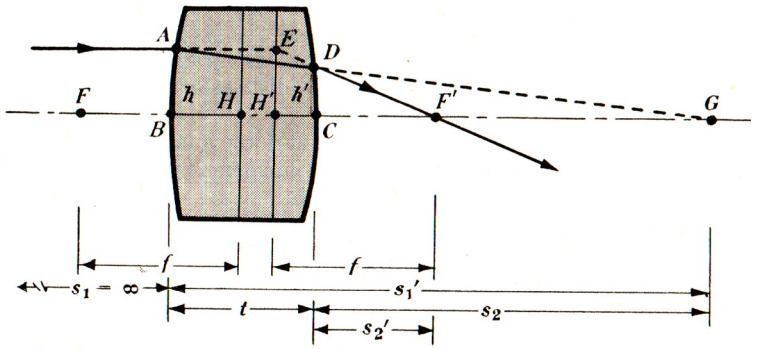


FIG. 4-18.—Lente gruesa sencilla.

en el punto A, a una altura h por encima del eje, y abandona la segunda superficie en el punto D, a una altura h'. Las prolongaciones de los rayos incidente y emergente se cortan en el punto E, que determina el plano principal imagen y el punto principal imagen H'. De los triángulos semejantes ABG y DCG, y dentro de la precisión correspondiente a la teoría de primer orden, se deduce:

$$\frac{h}{s'_1} = \frac{h'}{-s_2}$$

(La distancia s_2 es negativa, ya que la imagen formada por la primera superficie constituye un objeto virtual para la segunda.)

De los triángulos semejantes $EH'F'$ y DCF' resulta:

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{s'_2}$$

Al dividir la primera de estas ecuaciones por la segunda, se obtiene:

$$\frac{f}{s'_1} = -\frac{s'_2}{s_2},$$

o sea

$$\boxed{f = s'_1\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)} \qquad [4\text{-}17]$$

Ha sido necesario calcular las distancias s'_1, s_2 y s'_2 para determinar la posición del foco imagen, de modo que el cálculo de la distancia focal exige ya poco trabajo. Si la lente es delgada, [4-17] se reduce a [4-7],

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

pero téngase muy en cuenta que la última ecuación es un caso especial y no debe utilizarse para determinar la distancia focal de una lente gruesa.

Una vez determinadas la posición del foco imagen y la distancia focal, queda localizado el punto principal imagen llevando desde el foco imagen hacia la izquierda una distancia f.

Las posiciones del foco objeto y del punto principal objeto se encuentran mediante un cálculo análogo. Bien se determina la posición de un punto objeto situado sobre el eje cuya imagen se forme en el infinito, o se vuelve la lente y se repiten los cálculos utilizados para localizar el foco imagen.

No es raro que la distancia focal de una lente sea mayor que la mitad de la distancia que separa ambos focos, de modo que el punto principal imagen se encuentre a la izquierda del punto principal objeto, en lugar de a la derecha, como sucede en la figura 4-18. La disposición de la figura 4-18 es la considerada como normal; si está invertido el orden, se dice que los puntos principales están *cruzados*.

La posición de los focos se determina experimentalmente con relativa facilidad localizando la posición de la imagen de un objeto distante, pero esto no puede hacerse para los puntos principales, por ser necesario un aparato especial. Por esta razón los constructores miden de ordinario la distancia focal de una lente antes de salir de la fábrica y graban dicho valor sobre la montura de la lente. Las posiciones de los puntos principales se determinan entonces fácilmente a partir de las posiciones de los focos y de la distancia focal.

EJEMPLO.—Determínense la distancia focal y las posiciones de los focos y puntos principales de la lente gruesa sencilla de la figura 4-18. El índice de la lente es 1,50, su espesor axial 25 mm, el radio de su primera superficie 22 mm, y el de su segunda superficie, 16 mm.

De la ecuación [4-1], haciendo $s_1 = \infty$, resulta:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1{,}5}{s'_1} = \frac{1{,}5 - 1}{22},$$

$$s'_1 = +66 \text{ mm}.$$

Y de [4-2]:

$$s_2 = 25 - 66 = -41 \text{ mm}.$$

En virtud de [4-3]:

$$\frac{1{,}5}{-41} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1 - 1{,}5}{-16},$$

$$s'_2 = +14{,}7 \text{ mm}.$$

Esto es, el foco imagen F' se encuentra 14,7 mm a la derecha del segundo vértice. Según [4-17], la distancia focal de la lente es:

$$f = 66\left(-\frac{14{,}7}{-41}\right) = +23{,}6 \text{ mm}.$$

Por consiguiente, el punto principal imagen se encuentra 23,6 mm a la izquierda del foco imagen, o sea, 8,9 mm a la izquierda del segundo vértice.

Si la luz penetra por la otra cara de la lente,

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1{,}5}{s'_1} = \frac{1{,}5 - 1}{16}$$

$$s'_1 = +48 \text{ mm}.$$

Por tanto,

$$s_2 = 25 - 48 = -23 \text{ mm},$$

y

$$\frac{1{,}5}{-23} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1 - 1{,}5}{-22},$$

$$s'_2 = +11{,}4 \text{ mm}.$$

El foco objeto se encuentra, por tanto, 11,4 mm a la izquierda del vértice de la primera superficie. Dado que ambas distancias focales son iguales, el punto principal objeto se halla 23,6 mm a la derecha del foco objeto, o sea, 12,2 mm a la derecha del primer vértice.

Demostraremos ahora que las formas gaussiana y newtoniana de la ecuación de las lentes son aplicables tanto a las lentes gruesas como a las delgadas. La figura 4-19 representa un objeto PQ y su imagen $P'Q'$ formada por una lente gruesa. Se han indicado los focos, los puntos principales y los planos principales. No se han representado, en cambio, las superficies de la lente, porque no es necesario tenerlas en cuenta una vez localizados los puntos anteriores. Un rayo paralelo al eje, pro-

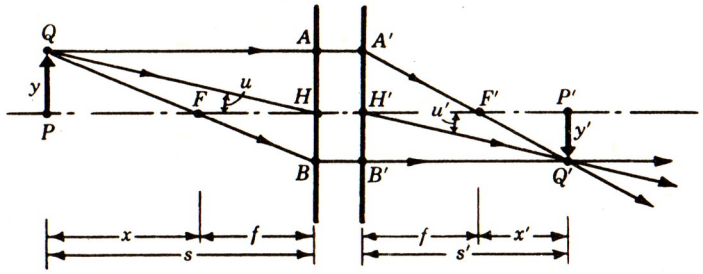


FIG. 4-19.—Planos focales y planos principales de una lente gruesa.

cedente de Q, puede considerarse que continúa en línea recta hasta A', su punto de intersección con el plano principal imagen, y desde allí pasa por el foco imagen F'. Un rayo procedente de Q, que pasa por el foco objeto F, es paralelo al eje a partir de B, su punto de intersección con el plano principal objeto.

Comparemos ahora las figuras 4-19 y 4-6. Se verá que si los lados derecho e izquierdo de la figura 4-19 se mueven uno hacia el otro hasta que coincidan los planos principales, ambas figuras resultan idénticas. En otras palabras, una lente delgada es un caso especial de una lente gruesa en la cual coinciden los planos principales.

Los triángulos semejantes PQF y FHB, de la figura 4-6, corresponden a los mismos triángulos de la figura 4-19, mientras que los triángulos $AH'F'$ y $F'P'Q'$ de la figura 4-6 corresponden a los $A'H'F'$ y $F'P'Q'$ de la figura 4-19. Por consiguiente, las ecuaciones [4-8] a [4-11] se aplican también a una lente gruesa, y las [4-12] a [4-15] se deducen directamente.

La figura 4-19 ilustra también cómo se localiza gráficamente la imagen formada por una lente gruesa. Además de los rayos QA y QB, puede dibujarse la marcha a través de la lente del rayo QH. Como el aumento lateral y'/y es igual a $-s'/s$, se deduce que

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'}$$

Pero

$$\frac{y}{s} = \text{tg } \theta, \quad \frac{y'}{s'} = \text{tg } \theta'.$$

Por tanto,

$$\theta' = -\theta,$$

y el rayo $H'Q'$ es paralelo al rayo HQ. En otras palabras, un rayo que procedente de Q, se propaga hacia el punto principal objeto H, no es desviado por la lente y, después de la refracción, parece proceder del punto principal imagen H'.

4-10. Lentes compuestas.—Con objeto de reducir las aberraciones, la mayor parte de las lentes utilizadas en los instrumentos ópticos son *compuestas*, esto es, se componen de varias lentes sencillas que tienen un eje común. Las superficies de las lentes contiguas pueden estar en contacto o bien dejar espacios de aire entre ellas. Cada lente compuesta, al igual que una lente sencilla, tiene dos focos y dos puntos principales. La distancia entre cada foco y su correspondiente punto principal es igual a la distancia focal. Las formas gaussiana y newtoniana de la ecuación de las lentes son también aplicables a las lentes compuestas.

Si los elementos de una lente compuesta son demasiado gruesos para que pueda considerarse como lente delgada, las posiciones de los focos han de determinarse mediante el cálculo superficie por superficie, según se ha hecho en la sección 4-9. La distancia focal está dada entonces por una generalización de la ecuación [4-17], esto es,

$$f = s'_1\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right) \cdots \quad [4\text{-}18]$$

donde s'_1, s_2, s'_2, etc., se refieren a las distancias objeto e imagen medidas desde sus respectivas superficies. Si las componentes son lentes delgadas, cuyas distancias focales se conocen, pueden encontrarse las posiciones de los focos mediante un cálculo lente por lente. La distancia focal viene dada todavía por la ecuación [4-18], con la única diferencia de que s'_1, s_2, s'_2, etc., se refieren a las distancias objeto e imagen medidas desde las respectivas lentes.

Para el caso especial representado en la figura 4-20, donde la lente compuesta está formada por dos lentes delgadas de distancias focales respectivas f_1 y f_2, separadas por una distancia t, la expresión de la distancia focal se reduce a una forma algo más sencilla. La figura 4-20

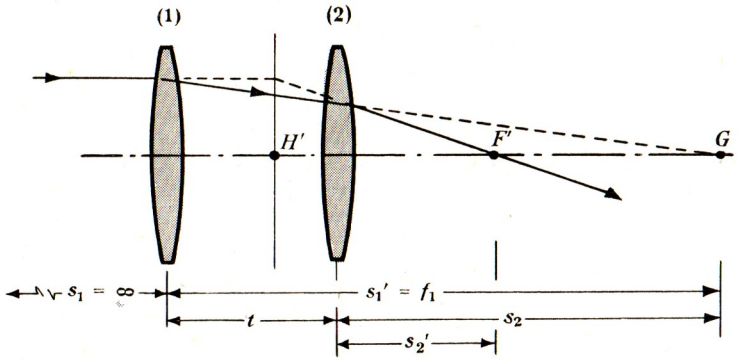


FIG. 4-20.—Lente compuesta formada por dos lentes delgadas.

representa un solo rayo incidente paralelo al eje, que pasa por el foco imagen F' de la lente compuesta y experimenta una sola desviación efectiva en el plano principal imagen. Del estudio de la figura se deduce:

$$s_1 = \infty,$$
$$s'_1 = f_1,$$
$$s_2 = -(s'_1 - t),$$

y

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$$

De estas ecuaciones y de la [4-18] se obtiene (se omiten los detalles que pueden servir de ejercicio):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{t}{f_1 f_2} \qquad [4\text{-}19]$$

En el caso especial de que las lentes estén en contacto, la distancia t es nula y [4-19] se reduce a la ecuación de constante aplicación

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \qquad [4\text{-}20]$$

EJEMPLO.—La lente compuesta de la figura 4-21 está formada por una lente convergente de distancia focal +20 cm, separada por una distancia de 10 cm de una lente divergente de distancia focal −20 cm. Determínense la distancia focal de la lente compuesta, y las posiciones de sus focos y puntos principales.

Siguiendo el método descrito anteriormente, se obtiene:

$$s'_1 = +20 \text{ cm},$$
$$s_2 = -10 \text{ cm},$$
$$s'_2 = +20 \text{ cm}.$$

El foco imagen se encuentra, por tanto, 20 cm a la derecha de la lente divergente.

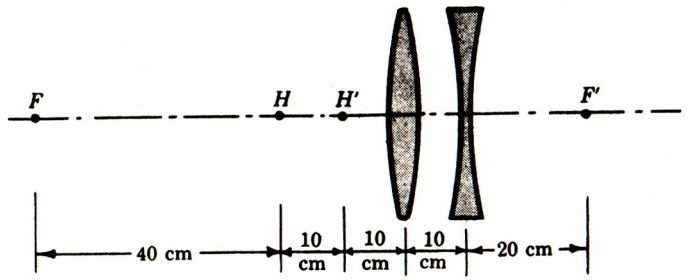


FIG. 4-21.—Principio del teleobjetivo.

Si la luz penetra por la otra cara,

$$s'_1 = -20 \text{ cm},$$
$$s_2 = +30 \text{ cm},$$
$$s'_2 = +60 \text{ cm},$$

y el foco objeto está situado 60 cm a la izquierda de la lente convergente.

La distancia focal de la lente compuesta, en virtud de [4-19], es:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{20} + \frac{1}{-20} - \frac{10}{20(-20)},$$
$$f = +40 \text{ cm}.$$

El punto principal objeto se encuentra 20 cm a la izquierda de la lente convergente, y el punto principal imagen 10 cm a la izquierda de esta lente, según muestra la figura 4-21.

Esta combinación de una lente convergente y una divergente aclara el fundamento del teleobjetivo. La lente tiene una gran distancia focal, produciendo así una gran imagen ($m = -f/x$), pero el plano focal imagen no está tan lejos detrás de la montura de la lente, por lo que la cámara no resulta incómodamente grande.

PROBLEMAS

4-1. *a*) Dibújense las diversas lentes delgadas que pueden obtenerse combinando dos superficies cuyos radios de curvatura son, en valor absoluto, 10 cm y 20 cm. *b*) ¿Cuáles son convergentes y cuáles divergentes? *c*) Calcúlese la distancia focal de cada lente si están hechas con un vidrio de índice 1,50.

4-2. Un objeto en forma de flecha de 0,5 pulg de longitud es perpendicular al eje de una lente convergente de distancia focal 1 pulg y diámetro 1,5 pulg. *a*) Determínense gráficamente en un esquema a escala natural la posición y tamaño de la imagen de la flecha para las siguientes distancias objeto s: 4 pulg, 2 pulg, 1 pulg, 3/4 de pulg. Dibújense en cada figura los rayos que parten del origen y del extremo de la flecha y pasan por el borde de la lente. *b*) Calcúlense para cada una de las distancias objeto anteriores la posición y tamaño de la imagen, utilizando ambas formas, gaussiana y newtoniana, de la ecuación de las lentes.

4-3. Un objeto en forma de flecha de 0,5 pulg de longitud se encuentra 2 pulg a la izquierda de una lente convergente delgada de distancia focal igual a 1 pulg y diámetro 1 pulg. Se coloca a la derecha de la primera y a una distancia z una segunda lente convergente de distancia focal igual a 1 pulg, coincidiendo los ejes de ambas lentes. *a*) Constrúyase un diagrama a escala natural, y dibújense a través del sistema los tres rayos procedentes de la punta de la flecha que representa el objeto y que pasan por el centro, el borde y el foco objeto de la primera lente, para los siguientes valores de z: 4 pulg, 3 pulg, 2 pulg y 1 pulg. (La lente a una distancia de 2 pulg explica la función de la lente de campo de un ocular; véase Sec. 6-5.) *b*) Calcúlense en cada caso la posición y tamaño de la imagen final, utilizando ambas formas, gaussiana y newtoniana, de la ecuación de las lentes. *c*) Dedúzcase en cada caso, del diagrama, el diámetro de la segunda lente necesario para transmitir el cono entero de rayos procedentes de la punta de la flecha, que atraviesa la primera lente.

4-4. El mismo problema anterior, excepto que la segunda lente es divergente y de distancia focal igual a −1 pulg.

4-5. Constrúyase gráficamente la imagen formada por una lente delgada convergente de: *a*) un objeto real situado

a la izquierda del foco objeto; *b*) un objeto real entre el foco objeto y la lente; *c*) un objeto virtual entre la lente y el foco imagen; *d*) un objeto virtual a la derecha del foco imagen.

4-6. Los radios de curvatura de las superficies de una lente delgada son +10 centímetros y +30 cm. El índice es 1,50. *a*) Calcúlense la posición y tamaño de la imagen de un objeto en forma de flecha de 1 cm de altura, perpendicular al eje de la lente y situado 40 cm a la izquierda de la misma; *b*) Se coloca una segunda lente análoga, a la derecha de la primera y separada de ella por una distancia de 160 cm. Calcúlese la posición de la imagen final. *c*) Lo mismo que *b*), excepto que la segunda lente está situada 40 cm a la derecha de la primera. *d*) Lo mismo que *c*), excepto que la segunda lente es divergente y su distancia focal −40 cm.

4-7. *a*) Dedúzcase una expresión análoga a la [4-7] para la distancia focal de una lente delgada de índice n_1 en un medio de índice n_2. *b*) Una lente delgada de distancia focal 10 pulg en el aire e índice de refracción 1,53 se encuentra sumergida en agua de índice de refracción 1,33. ¿Cuál es su distancia focal en el agua?

4-8. Dedúzcanse expresiones análogas a la [4-7] para las distancias focales objeto e imagen de una lente delgada de índice n_2 que tiene a su izquierda un medio de índice n_1 y a su derecha un medio de índice n_3.

4-9. Una lente delgada biconvexa construída con un vidrio de índice 1,50 tiene una distancia focal, en el aire, de 30 cm. La lente está montada en una abertura practicada en la pared de un depósito lleno de agua (índice 4/3). En la pared opuesta del depósito hay un espejo plano, a una distancia de la lente de 80 cm. *a*) Hállese la posición de la imagen formada por el sistema lente, agua y espejo, de un pequeño objeto situado fuera del depósito, sobre el eje de la lente y 90 cm a la izquierda de la misma. *b*) ¿Es la imagen real o virtual? *c*) ¿Derecha o invertida?

4-10. Supongamos que las flechas *oa*, *ob* y *oc* de la figura 4-14 tienen cada una 1 mm de longitud, y que el punto *o* está 30 cm a la izquierda de una lente delgada de distancia focal 20 cm. Hállese la longitud de la imagen de cada flecha.

4-11. Se utiliza una lente para proyectar la imagen de una diapositiva sobre una pantalla situada a 160 pies del proyector, siendo la imagen sobre la pantalla 100 veces mayor (dimensiones lineales) que la diapositiva. Si la pantalla se acerca ahora 100 pulg a la lente, ¿cuánto ha de desplazarse la diapositiva (respecto a la lente) para mantener enfocada la imagen sobre la pantalla?

4-12. La lente de una cámara amplificadora tiene una distancia focal de 12 cm. Cuando amplía un negativo al doble de su tamaño (dimensiones lineales) el negativo se encuentra a 16 cm de la cara más próxima de la lente. ¿A qué distancia de esta cara debe encontrarse para que la ampliación sea a tres veces su tamaño?

4-13. La distancia focal de un cierto objetivo fotográfico es 120 mm. La distancia focal desde la superficie más próxima de la lente a la placa es de 90 mm. ¿Cuánto y en qué sentido ha de desplazarse la lente respecto a la placa para obtener una fotografía de tamaño natural de un pequeño objeto?

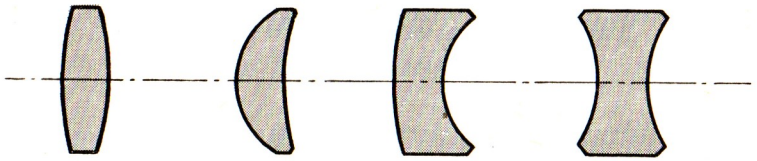
4-14. Después de enfocar una cámara fotográfica sobre un objeto muy distante, se encuentra que para enfocar sobre un objeto más cercano es necesario desplazar la lente 1 pulg hacia adelante desde la *posición de infinito*. La imagen del objeto tiene en este caso una altura sobre la placa de 1 pulg. Se desea ahora formar una imagen (del mismo objeto) cuya altura en la placa sea 2 pulg, lo cual se consigue volviendo a enfocar la cámara después de acercar el objeto aún más a la cámara. ¿Cuál es en este último caso la distancia de la lente a su posición inicial de enfoque al infinito?

4-15. Calcúlense las distancias focales y las posiciones de los focos y puntos principales de las lentes de la figura 4-22

(*a*), (*b*), (*c*) y (*d*). El espesor axial de cada lente es 10 mm, y su índice, 1,50.

4-16. Los radios de curvatura de las superficies de una lente de índice 1,50 son +10 cm y +8 cm. Hágase un esquema de la lente y calcúlese su distancia focal, si el espesor es: *a*) 4 cm; *b*) 6 cm; *c*) 8 cm.

4-17. Una esfera de vidrio de radio R e índice de refracción 1,50 se utiliza como



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

$R_1 = +100$ mm, $R_2 = -100$ mm | $R_1 = +100$ mm, $R_2 = +200$ mm | $R_1 = +200$ mm, $R_2 = +100$ mm | $R_1 = -100$ mm, $R_2 = +100$ mm

FIG. 4-22.

lente gruesa. Determínese la posición de sus focos, calcúlese su distancia focal y localícense sus puntos principales.

4-18. Determínese la posición de los focos, calcúlese la distancia focal y localícense los puntos principales de una varilla de vidrio de extremos convexos cuyos radios de curvatura miden 30 cm. El índice de refracción de la varilla es 1,50 y su longitud 45 cm.

4-19. Un ocular se compone de dos lentes convergentes delgadas e iguales de distancia focal 2 pulg, separadas por una distancia de 1 pulg. ¿Dónde se encuentran los focos y los puntos principales del conjunto, y cuál es su distancia focal?

4-20. Una cámara fotográfica provista de teleobjetivo se compone de una lente delgada convergente de 10 pulg de distancia focal a continuación de la cual, y a una distancia de 5 pulg, se dispone una lente divergente de distancia focal 20 pulg. Determínense las posiciones de los focos y planos principales del objetivo. ¿Cuál es su distancia focal?

4-21. Dos lentes delgadas cuyas distancias focales son $f_1 = -50$ mm y $f_2 = +100$ mm, respectivamente, están separadas por una distancia de 50 mm. *a*) ¿Cuál es la distancia focal del conjunto, considerado como una sola lente gruesa? *b*) ¿Dónde se encuentran los puntos principales del conjunto?

4-22. Un objeto se encuentra en el punto principal objeto de una lente. (El objeto es necesariamente virtual si este punto se halla dentro de la lente.) Determínense la posición y aumento de la imagen.

4-23. La distancia focal de una lente es 60 mm y la distancia entre sus focos es 125 mm. Calcúlese la posición de la imagen de: *a*) un objeto sobre el eje 20 mm a la izquierda del foco objeto; *b*) un objeto sobre el eje, 20 mm a la derecha del foco objeto; *c*) un objeto virtual, 25 mm a la derecha del punto principal imagen.

4-24. La distancia focal de una lente es 1,5 pulg. Los puntos principales son normales y están separados por una distancia de 0,5 pulg. *a*) Represéntense los puntos principales y los focos sobre un diagrama a escala natural. *b*) Hállese gráficamente la imagen de una flecha de 0,5 pulg de longitud, normal al eje de la lente y 2,5 pulg a la izquierda del foco objeto. *c*) Los rayos convergen hacia un objeto virtual en forma de flecha de 0,5 pulg de longitud, perpendicular al eje de la lente, y situado en el foco imagen. Determínese gráficamente la posición de la imagen de la flecha. *d*) Compruébese mediante el cálculo los resultados de las partes *a*) y *b*).

4-25. Utilícense las formas gaussiana

y newtoniana de la ecuación de las lentes para calcular la distancia x a la cual ha de colocarse un objeto O en la figura 4-23 para que su imagen se forme en el punto I. Las distancias se miden en centímetros.

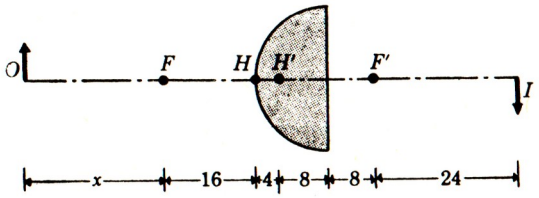


FIG. 4-23.

4-26. La distancia focal de la lente de la figura 4-24 es 10 cm. La imagen de un objeto distante sobre el eje, a la izquierda de la lente, se forma en un punto situado 7 cm a la derecha del vértice V_2, y la de un objeto distante situado a la derecha de la lente se forma 8 cm a la izquierda de V_1. Determínese la posición de la imagen de un objeto sobre el eje de la lente, 28 cm a la izquierda de V_1.

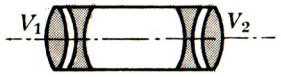


FIG. 4-24.

4-27. Una máquina amplificadora tiene una longitud máxima de 4 pies entre el negativo y el papel. La distancia focal de la lente es 10 pulg y la distancia entre sus puntos principales, que están cruzados, es 0,5 pulg. *a*) ¿Cuál es la máxima amplificación que puede obtenerse con este dispositivo? *b*) ¿Cuál es la reducción mínima?

4-28. Los rayos de una lente convergen hacia un punto imagen P, como indica la figura 4-25. ¿Qué espesor t de vidrio de índice 1,50 ha de interponerse entre la lente y la imagen para que ésta se forme en P'?

4-29. Un objeto se encuentra 3 m delante de un objetivo fotográfico que forma de él una imagen nítida, sobre una película situada 15 cm detrás de la lente. Una lámina de vidrio de caras paralelas, de espesor 12 mm e índice 1,50, se interpone entre la lente y la película como indica la figura 4-26. *a*) Determínese la nueva posición de la imagen. *b*) ¿A qué distancia delante de la lente habrá que colocar un objeto para que quede enfocado sobre la película, cuando está colocada la lámina, si permanece constante e igual a 15 cm la distancia de la lente a la película? Considérese la lente como delgada.

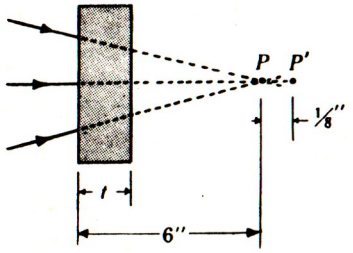


FIG. 4-25.

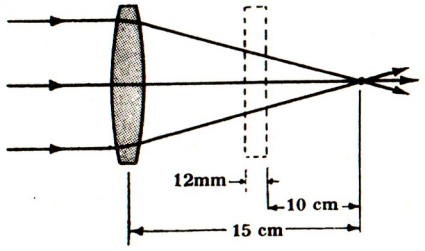


FIG. 4-26.

CAPÍTULO V

ABERRACIONES DE LAS LENTES Y DE LOS ESPEJOS

5-1. Aberraciones.—Las ecuaciones relativamente sencillas que hemos deducido y que relacionan las distancias objeto e imagen, las distancias focales, los radios de curvatura, etc., se han obtenido a partir de las expresiones generales para la refracción de un rayo en una superficie esférica haciendo la aproximación sen $\theta = \theta$. Esto es, se aplican únicamente a aquellos rayos que forman ángulos pequeños con el eje.

Sin embargo, en general, los rayos que inciden sobre una lente o un espejo no sólo proceden de los puntos situados sobre el eje, sino también de los que se encuentran fuera del mismo. Además, a causa del tamaño finito de la lente o el espejo, el cono de rayos que forma la imagen de cualquier punto no será el cono infinitesimal de la teoría de primer orden. Los rayos no paraxiales que proceden de un punto objeto dado no se cortan, en general, en el mismo punto después de la refracción. En consecuencia, la imagen formada por estos rayos no es nítida. Aparte de esto, la distancia focal de una lente depende de su índice de refracción, que varía con la longitud de onda. Por consiguiente, si la luz que procede de un objeto no es monocromática, la lente formará un cierto número de imágenes coloreadas que se encuentran en distintas posiciones y tienen tamaños diferentes, aunque estén formadas por rayos paraxiales.

Las discrepancias entre la imagen real y la predicha por la teoría se denominan *aberraciones*. Las producidas por la variación del índice con la longitud de onda reciben el nombre de *aberraciones cromáticas*. Las otras, que se originarían aunque la luz fuera monocromática, se denominan *aberraciones geométricas*.

Las aberraciones no son producidas por defectos de construcción de una lente o un espejo, tales como el no ser sus superficies exactamente esféricas, sino que son meras consecuencias de las leyes de la refracción y reflexión en las superficies esféricas.

5-2. Aberración de esfericidad de una lente.—El efecto conocido con el nombre de aberración de esfericidad está ilustrado en la figura 5-1. Los rayos paraxiales, procedentes de un punto P del eje, forman una imagen en P'. Los rayos que inciden sobre la lente en la proximidad de su borde, forman la imagen en P'', más cerca de la lente. Los rayos que inciden en las zonas intermedias de la lente forman la imagen entre P' y P''. No hay, evidentemente, ningún plano en el cual se forme una imagen nítida de P. Si se coloca una pantalla perpendicular al eje en P',